Wie entscheidet man, ob konvergente Teilfolgen existieren?

Satz 6.6 (Bolzano - Weierstraß)

> Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ hat einen Häufungswert und damit eine konvergente Teilfolge.

Bedeutung:

1.) ! Satz 6.6 $\Longleftrightarrow$ Vollständigkeitsaxiom

2.) charakterisiert genau die normierten Räume endlicher Dimension

3.) sichert später die Existenz von Extremwerten bei stetigen Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

<u>Beweis</u>: o. E. <u>reeller</u> Fall, denn:

$$\left\{\begin{array}{l}(z_n) = (x_n + i y_n) \text{ beschränkt in } \mathbb{C} \iff \\ (x_n) \text{ \underline{und} } (y_n) \quad \text{— ‖ —} \quad \text{in } \mathbb{R}\end{array}\right.$$

sowie
$$\left\{\begin{array}{l}z_n \longrightarrow z = x + iy \iff \\ x_n \to x \text{ \underline{und} } y_n \longrightarrow y\end{array}\right.$$

Sei also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge <u>in $\mathbb{R}$</u> mit

$$|a_n| \leq M \quad \forall n$$

für ein $M \in \mathbb{R}^+$.

<u>Intervallschachtelung</u>: $I_k = [A_k, B_k]$

(k als Index!)

- $I_1 := [-M, M]$

$(\Rightarrow a_n \in I_1$ für <u>alle</u> $n)$

• „ $I_k \to I_{k+1}$ “:

Sei $X := \frac{1}{2}(A_k + B_k)$; setze

$$[A_{k+1}, B_{k+1}] := \begin{cases} [X, B_k], & \text{falls } a_n \geq X \text{ für } \underline{\text{unendlich}} \text{ viele } n; \\ [A_k, X] & \text{sonst} \end{cases}$$

(man entscheidet sich also stets für die $\boxed{\text{rechte}}$ Hälfte, wenn a_n für ∞ viele n darin liegt)

Nach Konstruktion: $(*)_k$ $\boxed{\#\{n : a_n \in I_k\} = \infty}$

Offenbar ist (I_k) eine I.S.; sei $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$.

Beh: $\boxed{a \text{ ist H.W.}}$

Begründung: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\Longrightarrow$

$\exists\, k$ mit $|I_k| = B_k - A_k < \varepsilon \Longrightarrow$

$$\boxed{I_k \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)}$$

gemäß $⊛_k$ folgt:

$$\#\{n \in \mathbb{N} : a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\} = \infty$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{a \in \text{H.W.}}$ von (a_n)

Def. 6.5.

Nach Satz 6.5 ist dies gleichwertig mit der Existenz einer gegen a konvergenten Teilfolge. $\square$

Bem: Die Konstruktion von a ergibt, dass a $\boxed{\text{der größte H.W.}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

(Annahme: $\exists\, a' > a$, a' ist H.W. ...)

Modifiziere die Konstruktion so, dass man den kleinsten H.W. findet!

Def. 6.7: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte reelle Folge.

Man setzt:

$$A := \{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist H.W. von } (a_n)\}.$$

$\boxed{\sup A = \max A}$ $(\inf A = \min A)$ heißt Limes superior (inferior) von (a_n), in Zeichen:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \quad \left(\liminf_{n\to\infty} a_n, \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n\right).$$

Bemerkung:

1) nach Bolzano-W. ist $A \neq \emptyset$ und wegen der Beschränktheit von (a_n) auch beschränkt $\Longrightarrow$ $\sup A$, $\inf A$ existieren;

der Beweis zeigt: $\boxed{\sup A,\ \inf A \in A}$,

also $\sup A = \max A$, etc.

2.) es gibt Teilfolgen von (a_n), die gegen $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ konvergieren

(vgl. Satz 6.5 b))

Klassifikation der Divergenz

$\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ verhält sich anders als $(n)_{n\in\mathbb{N}}$; die zweite Folge konvergiert gewissermaßen gegen ∞. Genauer:

Def 6.8: a) (unbeschränkte Intervalle)

Für $K \in \mathbb{R}$ sei

$$(K,\infty) := \{x\in\mathbb{R} : x > K\},$$

$$[K,\infty) := \{\ldots \geq \ldots\},$$

$$(-\infty,K) := \{x\in\mathbb{R} : x < K\},$$

$$(-\infty,K] := \{\ldots \leq \ldots\}$$

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty :\Longleftrightarrow$$

$\forall K>0\ \exists N=N_K$ mit $a_n \geq K$ für alle $n \geq N$

<u>entsprechend</u>: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty :\Longleftrightarrow$ .....

Man sagt: die Folge ist <u>bestimmt divergent</u> oder <u>uneigentlich konvergent</u>.

Liegt <u>weder</u> Konvergenz <u>noch</u> <u>uneigentliche</u> Konvergenz vor, so nennt man die Folge <u>unbestimmt divergent</u>, z.B.

$$a_n := (-1)^n$$

c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge.

$\boxed{\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty}$ $:\Longleftrightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht nach oben beschränkt

($\Longleftrightarrow$ für eine Teilfolge ist $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \infty$);

$\boxed{\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty}$ $:\Longleftrightarrow \ldots$

Achtung: Für uneigentlich konvergente Folgen gelten die üblichen Rechenregeln i. a. nicht !

$$\lim_{n\to\infty} (n^2-n) = \infty \,,$$

$$\text{aber: } \lim_{n\to\infty} n^2 - \lim_{n\to\infty} n = \infty - \infty \quad \text{undefiniert!}$$

Zum Schluss des ∮en: eine äquivalente Beschreibung von Konvergenz ohne den Grenzwert vorher zu raten/kennen

Def. 6.9: Cauchy-Bedingung / Folge

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{C}$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge $:\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N=N_\varepsilon: |a_n-a_m|<\varepsilon$

für alle $n,m\geq N$ [wobei o.E. $n>m$ angenommen werden darf]

Satz 6.7: Kriterium von Cauchy

(a_n) konvergent $\Longleftrightarrow$ (a_n) Cauchy Folge

Bem: Für Konvergenz muss man also die Cauchy Bedingung nachrechnen. Dazu reicht es nicht zu zeigen

(*) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N_\varepsilon : |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$

Bspl.: $a_n := \sum_{k=1}^{n} 1/k, \quad n \in \mathbb{N}$

§7 $\Longrightarrow$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,}$

aber: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0,$

d.h. (*) ist erfüllt.

Beweis: „$\Longrightarrow$" Sei (a_n) konvergent, $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N = N_\varepsilon$ mit

$$|a_k - a| \leq \varepsilon/2 \quad \forall k \geq N_\varepsilon$$

Für $n, m \geq N$ folgt:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \leq \varepsilon.$$

"$\Longleftarrow$": Wähle $\varepsilon = 1$ in der Cauchy Bdg

$$\Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a_m| \leq 1 \quad \forall n, m \geq N$$

$$\Longrightarrow \quad |a_n - a_N| \leq 1 \quad \forall n \geq N$$

$$\Longrightarrow \quad |a_n| \leq 1 + |a_N| \quad -\text{"}-$$

D.h.: $$|a_k| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, |a_N| + 1\} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Also ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt

Bolzano-W. $\Longrightarrow \exists$ Teilfolge (a_{n_k}) und $a \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a$.

$\varepsilon > 0$ gegeben $\Longrightarrow$

(1) $\exists N$ mit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2 \quad \forall\, k \geq N$ <u>und</u>

(2) $\exists M$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon/2 \quad \forall\, n, m \geq M$

wähle $\boxed{k \geq N}$ mit $\boxed{n_k \geq M}$

$$\Longrightarrow : \quad \forall\, n \geq M \quad |a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{\underset{(1)}{<} \varepsilon/2}$$

$$< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(2) mit $m := n_k$

$\square$

Unsere Schlusskette:

$\boxed{\text{Vollständigkeit} \Longrightarrow \text{Bolzano-W.} \Longrightarrow \text{Cauchy Krit.}}$

<u>Zeige</u>: Cauchy-Eigenschaft $\Longrightarrow$ Vollständigkeit

§7 (Unendliche) Reihen

Sind Folgen, die durch Summation entstehen; alle speziellen Funktionen wie

$$e^x, \ \sin x, \ \log x, \ \ldots\ldots$$

werden auch durch konvergente Reihen erklärt

(Literatur: Konrad Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer Verlag ≥ 600 Seiten)

$\boxed{\text{Def 7.1}}$: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{C}$. Dann heißt

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

n-te Partialsumme.

Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird unendliche Reihe (mit Gliedern $a_1, a_2, \ldots$) genannt.

Falls $\lim_{n\to\infty} S_n$ existiert,

so schreibt man dafür $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bem: 1.) **formal** bezeichnet man mit dem **Symbol** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in der Regel **die Folge der Partialsummen**, auch wenn deren Konvergenz noch offen bzw. sogar nicht gegeben ist

2.) oft beginnt die Summation bei $k=0$ oder irgendeinem Index $k \in \mathbb{Z}$

3.) wir können alle Konvergenzkriterien für Folgen benutzen!

Beispiele:

1.) **Beh.:**

$$\boxed{e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}}$$

Bew: benutze die Ungleichung (→ Übung)

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{\uparrow}{\leq} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =: b_n$$

binomische Formel für die l.S.

[Referenz: Kaballo, Analysis I, 4.7 Satz, p.36]

sowie die bekannte Tatsache

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e = \lim_{n\to\infty} b_n$$

mit dem Einschließungskriterium.

2.) geometrische Reihe:

$z \in \mathbb{C}$, $|z|<1 \implies \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}}$

denn: $\sum_{k=0}^{n} z^k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktion}}}{=} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, $\quad |z|^{n+1} \longrightarrow 0$ wegen $|z|<1$.

3.) „Berechnung des Reihenwertes durch Umformen" (nur selten möglich!)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,\frac{1}{k+1} = 1} \; :$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 .$$

4.) Konvergenzbeweis durch Vergleich mit bekannten Reihen

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty} \; :$$

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n\cdot n}$$

$$< 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \leq 1 + S_n' ,$$

$$S_n' := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} .$$

Nach 3.) ist $S_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, also gilt

$$\boxed{S_n \leq 2} \quad \forall n$$

(, denn $S_n' \nearrow 1$). Die Folge (S_n) ist somit monoton wachsend und nach oben beschränkt, folglich existiert $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$.

5) Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist bestimmt divergent.

Zu zeigen: $$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Dazu bilde $$S_{2^m} = \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) +$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{1+2^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) =$$

$$1 + \sum_{\ell=1}^{m} \Bigg\{ \underbrace{\sum_{k=1+2^{\ell-1}}^{2^\ell} \frac{1}{k}}_{2^{\ell-1} \text{ Summanden} \geq \frac{1}{2^\ell}} \Bigg\}$$

$$\geq 1 + \sum_{\ell=1}^{m} 2^{\ell-1} \cdot 2^{-\ell} = 1 + \frac{m}{2}$$

Also: $$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty}$$

Dagegen zeigen wir später:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \quad \text{konvergiert}$$

(alternierend harmonische Reihe)

Rechenregeln für konvergente Reihen

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\Longrightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ konvergent für beliebige

Zahlen α, β mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Beweis: Gesetze für konvergente Folgen

Konvergenzkriterien (für Reihen):

Satz 7.1 (Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ und $p \in \mathbb{N}$.

Beweis: Die Cauchy-Bedingung fordert

$$|S_m - S_n| < \varepsilon \quad \forall \; m > n \geq N$$

für die Partialsummen; nun ersetze

$$m = n + p, \; p \in \mathbb{N}$$

$\square$